2. *Duration*

Metodi Statistici per il Credito e la Finanza

Stefano Di Colli

Tassi di interesse e rendimenti

- La redditività di un'obbligazione è misurata dal **tasso di rendimento** non dal tasso di interesse
- Un indicatore del rendimento deve tener conto sia l'entità dei flussi finanziari che il momento in cui questi flussi si manifestano

Tassi di interesse e rendimenti

- I flussi finanziari possono essere scomposti in:

1. flussi relativi alla componente per **interesse** (cedole)
2. flussi relativi alla componente per **capitale** (prezzo di rimborso, prezzo di vendita anticipata del titolo)

- Se l'investitore decide di smobilizzare il titolo prima della scadenza, sarà soggetto ad un **prezzo di mercato**, non stimabile ex ante

Tassi di interesse e rendimenti

- Al momento dell'acquisto di un titolo vi sono alcune componenti **certe** e altre **aleatorie** (dipendono dal mercato)
- <u>Componenti certe</u>: cedole periodiche sui titoli a tasso fisso e lo scarto di emissione (differenza tra prezzo di rimborso e valore nominale)
- <u>Variabili aleatorie</u>: reinvestimento dei flussi periodici, prezzo di vendita

Tassi di interesse e rendimenti

Limiti del *TRES*

- Il *TRES* è una misura **ex-ante**, totalmente incapace di stimare le componenti aleatorie
- É valido solo nel caso in cui l'*holding period* coincida la durata residua del titolo
- É valido solo nel caso in cui i tassi siano stabili nel tempo (**curva piatta**)
- Ne segue che il rendimento di un'obbligazione non necessariamente coincide con il tasso di interesse o con il *TRES*

Tassi di interesse e rendimenti

- Il rendimento di un'obbligazione posseduta dal tempo *t* al tempo *t*+1 può essere espresso come

$$\boxed{R = \frac{C + P_{t+1} - P_t}{P_t}}$$

- Che può essere riscritto separando i due termini

$$\boxed{R = \overbrace{\frac{C_t}{P_t}}^{i_c} + \overbrace{\frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}}^{g} = i_c + g}$$

- Generalizzando per tener conto di investimenti con durata diversa dall'anno

$$\boxed{P = \sum_{t=1}^{n} \frac{FC_t}{(1 + TRES)^t}}$$

Tassi di interesse e rendimenti

- Domanda: *cosa succede al rendimento se il tasso di interesse aumenta?*
- Un aumento dei tassi di interesse comporta una diminuzione dei prezzi delle obbligazioni

⇩

- Perdita in conto capitale sulle obbligazioni la cui vita residua è maggiore dell'*holding period* ($g<0$)
- L'unica obbligazione il cui rendimento è uguale a quello a scadenza iniziale è quella la cui vita residua coincide con l'*holding period*

Tassi di interesse e rendimenti

- Quanto più è **distante la scadenza** di un'obbligazione (vita residua) tanto maggiore è la variazione di prezzo associata a una modifica del tasso di interesse
- Anche un'obbligazione con un tasso di interesse inizialmente molto appetibile, può avere un rendimento **negativo** in presenza di tassi al rialzo
- Se l'*holding period* è inferiore al vita residua, c'è un **rischio di interesse**
- Se l'*holding period* è superiore alla vita residua, c'è un **rischio di reinvestimento**

Tassi di interesse e rendimenti

- Esempio:
- Si consideri di disporre di €1000 e avere un'*holding period* di due anni, mentre il tasso di interesse è al 10%
- Si compri un'obbligazione a 1 anno
- Se alla fine dell'anno il tasso è sceso al 5% si reinvestiranno €1100 al 5% per il secondo anno
- Alla scadenza del secondo il rendimento biennale sarà stato del 7,24%, più basso del 10% biennale

Tassi di interesse e rendimenti

- Domanda: *qual'è il guadagno o la perdita sui titoli senza cedola a 10 anni per i quali il tasso di interesse è aumentato dal 10 al 20%?*

$$\boxed{g = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}}$$

$$P = \frac{1000}{(1+0,10)^{10}}$$

$$P_{t+1} = \frac{1000}{(1+0,20)^{9}}$$

$$g = \frac{193,81 - 385,54}{385,54}$$

$$\boxed{g = -0,497 = -49,7\%}$$

Indicatori di liquidità

- La liquidità di un titolo esprime la capacità dello stesso di essere **rivenduto** in modo rapido ed economicamente soddisfacente
- La **liquidità naturale** riguarda la capacità dei titoli obbligazionari di produrre alle scadenze previste flussi finanziari per capitale e interessi
- La **liquidità artificiale** si riferisce allo smobilizzo del titolo obbligazionario sul mercato secondario prima della loro naturale scadenza

Indicatori di liquidità

- Gli indicatori di liquidità possono essere suddivisi in
- Indicatori elementari: stimano il grado di liquidità naturale di un titolo obbligazionario con riferimento all'ultimo periodo di rimborso del capitale
  - Durata nominale
  - Durata residua
- Indicatori sofisticati: stimano il grado di liquidità naturale di un titolo obbligazionario considerando la gran parte dei flussi stessi
  - Vita media probabile
  - Vita media matematica

Indicatori di liquidità

- Indicatori completi: stimano il grado di liquidità naturale di un titolo obbligazionario considerando la totalità dei flussi finanziari
  - Durata media ponderata
  - Durata media finanziaria o *duration*

Durata nominale

- La durata nominale misura il periodo intercorrente tra il momento dell'emissione del titolo e la data di rimborso dell'ultima quota di capitale
- Ipotizzando che i periodi di maturazione delle quote di capitale siano $t_1, t_2, \ldots, t_n$ la durata nominale risulterà essere

$$\boxed{DN = t_n}$$

- La durata nominale può essere di interesse per valutare la liquidità dei titoli di nuova emissione, ma non quelli già in circolazione

Durata residua

- La <u>durata nominale</u> misura il periodo intercorrente tra il momento della sottoscrizione del titolo e la data di rimborso dell'ultima quota di capitale
- Ipotizzando che i periodi di maturazione delle quote di capitale siano $t_1, t_2, \ldots, t_n$ e che il titolo è stato sia stato acquistato alla data T_k, (dove $T_k < t_n$) la durata residua risulterà essere

$$\boxed{DR = t_n - T_k}$$

- Si presta alla valutazione anche dei titoli in circolazione
- Non valuta l'effetto di liquidità connesso ai flussi finanziari per capitale e interessi alle scadenze intermedie

Vita media probabile

- La vita media probabile è data dalla media aritmetica ponderata dei periodi di rimborsi delle quote capitale
- Ipotizzando che un titolo obbligazionario rimborsi quote di capitale di importo pari a $C_1, C_2, \ldots, C_n$ alle date $t_1, t_2, \ldots, t_n$

$$\boxed{VMP = \frac{t_1 \times C_1 + t_2 \times C_2 + \ldots + t_n \times C_n}{C_1 + C_2 + \ldots + C_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \times C_k}{\sum_{k=1}^{n} C_k} = \sum_{k=1}^{n} t_k \times \frac{C_k}{\sum_{k=1}^{n} C_k}}$$

- Non considera le scadenze relative alla maturazione dei flussi finanziari per interesse
- Trascura il problema del diverso valore nel tempo

Vita media matematica

- La vita media matematica è data dalla media aritmetica ponderata dei periodi di scadenza delle quote di rimborso del capitale
- Ipotizzando che un titolo obbligazionario rimborsi quote di capitale di importo pari a $C_1, C_2, \ldots, C_n$ alle date $t_1, t_2, \ldots, t_n$

$$\boxed{VMM = \frac{t_1 \times \dfrac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + t_2 \times \dfrac{C_2}{(1+r)^{t_2}} + \ldots + t_n \times \dfrac{C_n}{(1+r)^{t_n}}}{\dfrac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + \dfrac{C_2}{(1+r)^{t_2}} + \ldots + \dfrac{C_n}{(1+r)^{t_n}}} =}$$

Vita media matematica

$$
= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k \times \frac{C_k}{(1+r)^{t_k}}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^{t_k}}} = \sum_{k=1}^{n} t_k \times \frac{\dfrac{C_k}{(1+r)^{t_k}}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_k}
$$

- Non assolve al problema della mancata considerazione delle scadenze alle quali maturano eventuali flussi finanziari **per interessi**
- Si passa agli indicatori completi

Durata media ponderata

- La <u>durata media ponderata</u> è data dalla media aritmetica ponderata dei periodi di maturazione dei flussi finanziari sia per interessi sia per capitale
- Ipotizzando che un titolo obbligazionario presenti flussi finanziari futuri per capitale e interessi di importo pari a $F_1, F_2, \ldots, F_n$ alle date $t_1, t_2, \ldots, t_n$

$$\boxed{DMP = \frac{t_1 \times F_1 + t_2 \times F_2 + \ldots + t_n \times F_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \times F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k} = \sum_{k=1}^{n} t_k \times \frac{F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}}$$

Durata media ponderata

- Limite: i flussi non sono considerati in funzione del momento della loro effettiva manifestazione (non sono presi i valori attuali)

Duration o durata media finanziaria

- La durata media finanziaria è la media aritmetica ponderata dei periodi di maturazione dei flussi rispetto al loro valore attuale totale
- Ipotizzando che un titolo obbligazionario presenti flussi finanziari futuri per capitale e interessi di importo pari a F_1, F_2, …, F_n alle date t_1, t_2, …, t_n

$$\boxed{DUR = \frac{t_1 \times \dfrac{F_1}{(1+r)^{t_1}} + t_2 \times \dfrac{F_2}{(1+r)^{t_2}} + \ldots + t_n \times \dfrac{F_n}{(1+r)^{t_n}}}{\dfrac{F_1}{(1+r)^{t_1}} + \dfrac{F_2}{(1+r)^{t_2}} + \ldots + \dfrac{F_n}{(1+r)^{t_n}}} =}$$

Vita media matematica

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \times \frac{F_k}{(1+r)^{t_k}}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k}}}$$

- Può essere riscritta anche come segue

$$DUR = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \frac{FC_t}{(1+TRES)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{FC_t}{(1+TRES)^t}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \frac{FC_t}{(1+TRES)^t}}{P}$$

Duration

- In pratica, un' obbligazione decennale con cedola annua al 10% può essere **scomposta** in una serie di titoli senza cedola annuali
- La duration rappresenta la **velocità di rientro** dall'investimento
- In termini figurati può essere vista come la collocazione temporale del suo **baricentro finanziario**

Duration

- Esempio: si calcoli la durata media finanziaria di un'obbligazione avente le seguenti caratteristiche

Obbligazione con cedola	
Durata	5 anni
Frequenza cedole	Annuale
Importo cedola	5%
Valore nominale	100
Prezzo di emissione	100
TRES	5%

Duration

- Quanto maggiore è la vita residua di un'obbligazione, tanto maggiore è la sua duration
- Quando i tassi di interesse aumentano, la duration dell'obbligazione con cedola diminuisce
- Quanto più è elevata la cedola, tanto minore è la duration del titolo
- Quanto più è elevata la duration dei titoli, tanto più grande è la variazione percentuale nel valore di mercato del titolo a fronte di una variazione del tasso di interesse

Convessità

- La convessità è la media aritmetica ponderata delle scadenze sommate al quadrato delle scadenze

$$C = \sum_{k=1}^{n} \left(t_k + t_k^2 \right) \times \frac{\frac{F_k}{(1+r)^{t_k}}}{P}$$

- La convessità misura il grado di dispersione dei flussi intorno alla duration
- Maggiore è la dispersione dei flussi intorno alla duration maggiore è la convessità